解析几何：

圆与方程

1. 圆的标准方程：圆心为$C(h,k)$，半径为r的圆的方程$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$叫做圆的标准方程。特别地，圆心在坐标原点，半径为r的圆形是$x^2+y^2=r^2$。

2. 点与圆的位置关系

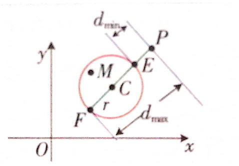
已知圆心$C(h,k)$，半径r，M点的坐标为(x_0,y_0)，则

$|MC|<r$点M在圆C内

$|MC|=r$点M在圆C上

$|MC|>r$点M在圆C外

其中$|MC|=\sqrt{(x_0-h)^2+(y_0-k)^2}$。



点M在圆内，点E，F在圆上，点P在园外。

点P到圆上的点的最大和最小距离为：

$d_{max}=|PF|=|PC|+r$

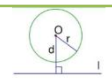
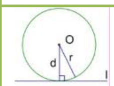
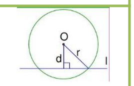
$d_{min}=|PE|=|PC|-r$

3. 圆的一般方程：$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

特点：x^2，y^2的系数相同，且不等于零，同时xy不含项。

4. 用待定系数法求圆的方程的一般步骤：
   - 根据题意，选择标准方程或一般方程。
   - 根据条件列出关于圆的方程组，至少 3 个方程组。
   - 求解方程组（可利用计算机求解）

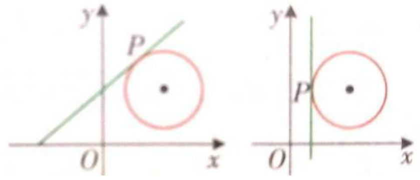
5. 直线与圆的关系

位置关系	相离	相切	相交
二元二次方程组	无解	1 个解	2 个解
一元二次方程组	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
圆心到直线的距离d与圆的半径r的关系	$d<r$	$d=r$	$d>r$
图示			

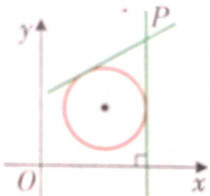
6. 圆的切线

I. 求过圆上的一点(x_0,y_0)的圆的切线方程
   - 先求切点与圆心连线的斜率m。
   - 若m不存在，则由图形可写成切线方程为$y=y_0$。
   - 如$m=0$，则由图形可写成切线方程为$x=x_0$。
   - 若m存在且$m\neq 0$，则由垂直关系知切线的斜率为$-\frac{1}{m}$，由点斜式方程可求切线方程。

II. 过圆外的一点(x_0,y_0)的圆的切线方程
   - 几何方法：当斜率存在时，设为m，则切线方程为$y-y_0=m(x-x_0)$，即$mx-y+y_0-mx_0=0$。由圆心到直线的距离等于半径长，即可求出m，进而得出切线方程。
   - 代数方法：当斜率存在时，设为m，则切线方程为$y-y_0=m(x-x_0)$，即$y=kx-kx_0+y_0$，代入圆的方程，得到关于x的一元二次方程，由$b^2-4ac=0$，求得，切线方程即可求出。



过圆上一点的切线只有一条，它有斜率存在或不存在两种情况。



过圆外一点的切线必有两条，当解出的m值唯一时，应检验是否有一条垂直于x轴的切线。

7. 直线与圆相交的弦长问题

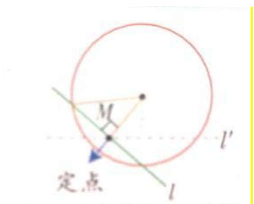
已知直线与圆相交于A，B两点，

- 代数法：设$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，由根与系数的关系及弦长公式可知

$$|AB| = \sqrt{1+m^2}|x_1 - x_2| = \sqrt{1+m^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

m为直线AB的斜率

- 几何法：由弦心距d，半径r和半弦长构成的直角三角形可知，$|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$



直线过圆内某定点的最短弦长：当直线与圆心、定点所在的直线垂直时，弦长最短。图中直线l被圆所截的弦长最短。

8. 圆与圆的位置关系

I. 两圆的位置关系有外离、外切、相交、内切和内含。

II. 判断两圆的位置关系，有以下两种方法：

- （代数法）利用两圆的交点进行判断：设两圆的方程组成的方程组为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2g_1 + 2f_1 + c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2g_2 + 2f_2 + c_2 = 0 \end{cases}$$

则方程组，

有 2 组实数解：两圆相交

有 1 组实数解:两圆外切或内切

无实数解：两圆外离或内含

- （几何法）利用两圆的圆心距进行判断：设两圆

C_1：$(x-h_1)^2 + (y-k_1)^2 = r_1^2$

C_2：$(x-h_2)^2 + (y-k_2)^2 = r_2^2$

圆心距：

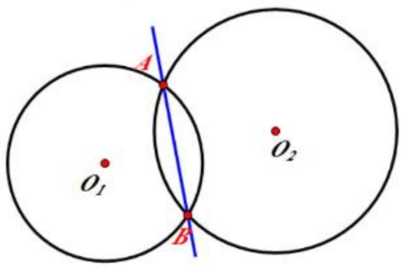
$$d = \sqrt{(h_2-h_1)^2 + (k_2-k_1)^2}$$

位置关系	外离	外切	相交	内切	内含
d与R、r关系	$d>R+r$	$d=R+r$	$\lvert R-r\rvert<d<R+r$	$d=\lvert R-r\rvert$	$d<\lvert R-r\rvert$
交点个数	无交点	唯一交点	两个交点	唯一交点	无交点
图形特征					

判断圆与圆之间的位置关系一般是求出圆心之间的距离与半径的和与差，比较大小关系即可。

9. 两圆相交的公共弦长问题

圆C_1：$x^2 + y^2 + 2g_1 + 2f_1 + c_1 = 0$ 与圆C_2：$x^2 + y^2 + 2g_2 + 2f_2 + c_2 = 0$ 相交时的公共弦长所在的直线方程为 $2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + c_1 - c_2 = 0$，则两圆相交的公共弦长问题就转化为直线与圆相交的弦长问题。



求两圆的公共弦长有两种方法：

- 代数法：将两圆的方程联立，解出两圆交点的坐标，利用两点间的距离公式求出弦长。

- 几何法：求出公共弦所在的直线方程，结合圆的半径、半弦长、弦心距构成的直角三角形，利用毕式定理求出弦长。