代数

复数的概念

1. 把集合$C=\{a+bi|a,b\in R\}$中的数，即形如$a+bi(a,b\in R)$的数叫做复数，其中i叫做**虚数单位**，全部复数所成的集合C叫做复数集，其中$i^2=-1$。复数通常用字母z表示，即$z=a+bi(a,b\in R)$，这一表示形式叫做复数的代数形式。对于复数$z=a+bi$，其中的a与b分别叫做复数的实部与虚部。

2. 在复数集$C=\{a+bi|a,b\in R\}$中任取两个数$a+bi$，$c+di$ $(a,b,c,d\in R)$，规定：$a+bi$与$c+di$ 相等的充要条件是$a=c$且$b=d$。

3. 对于复数$a+bi$，当且仅当$b=0$时，它是实数；当且仅当$a=b=0$ 时,他是实数；当时$b\neq 0$，叫做虚数；当$a=0$ 且$b\neq 0$ 时，叫做纯虚数。

4. 复数的模：向量的模r叫做复数$z=a+bi$的模，记作$|z|$或$|a+bi|$。如果$b=0$，那么$z=a+bi$是一个实数a，它的模等于$|a|$（就是a的绝对值）。由模的定义可知：

$$|z|=|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$(r\geq 0,r\in R)$$

5. 共轭复数：一般地，当两个复数的实部相等，虚部为相反数时，这两个复数叫做互为共轭复数。虚部不等于 0 的两个共轭复数也叫做共轭虚数。通常记复数z的共轭复数为$\bar{z}$。

   性质：若$z=a+bi$，它的共轭复数$\bar{z}=a-bi$，则
   - $z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$
   - $z+\bar{z}=2a,z-\bar{z}=-2bi$

6. 复数的除法及常用结论

复数除法的法则

- 规定复数的除法是乘法的逆运算
- 设$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$是两个复数，则它们的商

$$(a+bi)\div(c+di)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

- 两个复数相除（除数不为 0），所得的商是一个确定的复数。

注意：
在进行复数除法运算时，通常先把$(a+bi)\div(c+di)$写成$\frac{a+bi}{c+di}$的形式，再把分子与分母同乘分母的共轭复数$c-di$，化简后即得结果。

复数运算中的常用结论

- $(1\pm i)^2=\pm 2i;(1+i)(1-i)=2;\frac{1}{i}=-i;\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2};\frac{1+i}{1-i}=i;\frac{1-i}{1+i}=-i$
- $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0(n\in N)$
- i的周期性：$i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i(n\in N)$
- $i^n+i^{-n}=\begin{cases}0\text{，}n\text{为奇数，}\\2\text{，}n\text{为 4 的倍数，}\\4\text{，}n\text{为偶数，但非 4 的倍数。}\end{cases}$
- 记$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则$\omega^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$。则有

$$\omega^2=\bar{\omega},\omega=\overline{\omega^2}$$
$$|\omega|=|\omega^2|=1$$
$$\omega^2+\omega+1=0,\omega^3=1$$

7. 复数的三角函数式

$$a+bi=r(cos\theta+isin\theta)$$

其中$\begin{cases}r=\sqrt{a^2+b^2}\\tan\theta=\frac{b}{a}\end{cases}$

乘法法则：

$$r_1(cos\theta_1+isin\theta_1)\cdot r_2(cos\theta_2+isin\theta_2)$$
$$=r_1r_2[cos(\theta_1+\theta_2)+isin(\theta_1+\theta_2)]$$

除法法则：

$$\frac{r_1(cos\theta_1+isin\theta_1)}{r_2(cos\theta_2+isin\theta_2)}$$
$$=\frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1-\theta_2)+isin(\theta_1-\theta_2)]$$

8. 隶美佛定理

$$[r(cos\theta + isin\theta)]^n = r^n(cos\,n\theta + isin\,n\theta)$$
$$(n \in N)$$

9. 复数的开方

复数$r(cos\theta + isin\theta)$的$n$次方根是

$$\sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + isin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$
$$k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

10. 一元n次方根式根的讨论

定理一（代数基本定理）

- 一元n次方根式在复数集合内至少有一个根。

定理二

- 一元n次方根式在复数集合内有且只有n个根。

定理三

- 如果实数系数方程式$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$，有虚根$a + bi$（其中$a$，$b$是实数，$b \neq 0$），那么它必有另一个虚根$a - bi$。

定理四（韦达定理）

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

设根是x_1，x_2，…，x_n，那么

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_2}{a_0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\dfrac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

笔记：