三角学：

角度制和弧度制

1. 弧度制：把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，用符号 rad 表示。

2. 角度与弧度的换算

$$360 = 2\pi\,rad$$
$$180 = \pi\,rad$$
$$1° = \frac{\pi}{180}\,rad$$
$$1rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)°$$

3. 扇形的弧长公式和面积公式

$$l = r\theta$$

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr$$

$l =$ 弧长
$r =$ 半径
$\theta =$ 圆心角
$S =$ 面积

三角函数

1. 设α是一个任意角，它的终边与单位圆交于点 P(x, y)，那么：
   a. y叫做的α正弦，记作$sin\alpha$，即$sin\alpha = y$
   b. x叫做的α余弦，记作$cos\alpha$，即$cos\alpha = x$
   c. $\frac{y}{x}$叫做的α正切，记作$tan\alpha$，即$tan\alpha = \frac{y}{x}(x \neq 0)$

2. 三角函数值在各象限的符号（正数或负数），口诀：All Science Teacher Crazy（一全正，二正弦，三正切，四余弦）

三角函数	定义域
$sin\alpha$	R
$cos\alpha$	R
$tan\alpha$	$\left\{\alpha \middle| \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$

3. 三角函数的特别角

角度α	$30°$	$45°$	$60°$
$sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

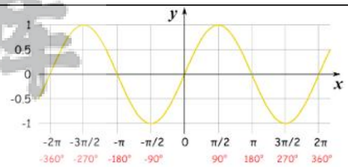
4. 同角三角函数的基本关系

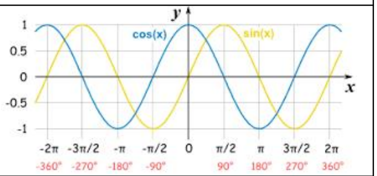
$$sin^2x + cos^2x = 1$$

$$tanx = \frac{sinx}{cosx}\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\right)$$

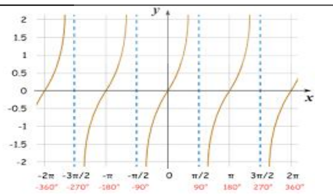
5. 诱导公式：奇变偶不变，正负看象限（奇：$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$；偶：π，2π）

6. 正弦函数、余弦函数的性质

函数	$y = sinx$
定义域	R
值域	$[-1,1]$
图像	
奇偶性	奇函数
周期	$2k\pi$，$k \in Z$且$k \neq 0$，最小正周期：2π
单调性	在$\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right](k \in Z)$上递增，其值从−1 增大到 1；在$\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi - \frac{\pi}{2}\right](k \in Z)$上递减，其值从 1 减少到−1.
极值	当$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}(k \in Z)$时，$y = -1$；当$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}(k \in Z)$时，$y = 1$
对称轴	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$
对称中心	$(k\pi, 0), k \in Z$

函数	$y = cosx$
定义域	R
值域	$[-1,1]$
图像	
奇偶性	偶函数
周期	$2k\pi$，$k \in Z$且$k \neq 0$，最小正周期：2π
单调性	在$[2k\pi-\pi, 2k\pi](k \in Z)$上递增，其值从$-1$增大到1；在$[2k\pi, 2k\pi+\pi](k \in Z)$上递减，其值从1减少到$-1$.
极值	当$x = 2k\pi+\pi(k \in Z)$时，$y=-1$；当$x = 2k\pi(k \in Z)$时，$y = 1$
对称轴	$x = k\pi, k \in Z$
对称中心	$\left(k\pi+\frac{\pi}{2}, 0\right), k \in Z$

7. 正切函数的图像与性质

函数	$y = tanx$
定义域	$\left\{x \middle\vert x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$
值域	R
图像	
奇偶性	奇函数
周期	$k\pi$，$k \in Z$且$k \neq 0$，最小正周期：π
单调性	在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k \in Z)$上是增函数
对称中心	$\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right), k \in Z$

三角恒等变换

1. 两角和差的正弦、余弦和正切公式：

$$sin(x \pm y) = sinxcosy \pm cosxsiny$$

$$cos(x \pm y) = cosxcosy \mp sinxsiny$$

$$tan(x \pm y) = \frac{tanx \pm tany}{1 \mp tanxtany}$$

2. 倍角公式：

$$sin2x = 2sinxcosx$$

$$\begin{aligned} cos2x &= cos^2x - sin^2x \\ &= 2cos^2x - 1 \\ &= 1 - 2sin^2x \end{aligned}$$

$$tan2x = \frac{2tanx}{1 - tan^2x}$$

倍角公式的逆向变换及变形：

a. $1 \pm sin2x = (sinx \pm cosx)^2$

b. 降幂公式：

$$cos^2x = \frac{1 + cos2x}{2}$$

$$sin^2x = \frac{1 - cos2x}{2}$$

c. 升幂公式：

$$1 + cosx = 2cos^2\frac{x}{2}$$

$$1 - cosx = 2sin^2\frac{x}{2}$$

3. 半角公式：

$$sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cosx}{2}}$$

$$cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cosx}{2}}$$

$$tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cosx}{1 + cosx}} = \frac{sinx}{1 + cosx} = \frac{1 - cosx}{sinx}$$

以上称之为半角公式，符号由$\frac{x}{2}$所在象限决定。

sjuec.com 独中学库 线上

4. 万能公式：

$$sin2x = \frac{2tanx}{1+tan^2x}$$
$$cos2x = \frac{1-tan^2x}{1+tan^2x}$$

5. 辅助角公式：

$$asinx + bcosx = Rsin(x-\alpha)$$

其中，$R=\sqrt{a^2+b^2}, \alpha = tan^{-1}\frac{b}{a}$

解三角形

1. 正弦定理：在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$$

正弦定理的变形：

a. $\frac{a}{b} = \frac{sinA}{sinB}$，$\frac{b}{c} = \frac{sinB}{sinC}$，$\frac{a}{c} = \frac{sinA}{sinC}$

b. $a:b:c = sinA:sinB:sinC$

c. $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R$（其中$R$为$\Delta ABC$外接圆半径），即$a = 2RsinA$，$b = 2RsinB$，$c = 2RsinC$

2. 余弦定理：三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍。即

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$$

3. 三角形面积公式：

$$S = \frac{1}{2}absinC$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$\left(s = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

r为三角形的内切圆半径

笔记：

sjuec.com 独中学库 线上