微积分

导数及其应用

1. 导数：函数$y=f(x)$在$x=x_0$处的瞬时变化率是$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，我们称它为函数$y=f(x)$在$x=x_0$处的导数，记作$f'(x)$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

2. 函数$y=f(x)$在点x_0处的导数的几何意义是曲线$y=f(x)$上过点x_0的切线的斜率，即斜率$m=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x)$。

3. 导数的计算公式

导数的相关计算公式

一、常用求导公式

(1)$(C)'=0$

(2)$(x^n)'=nx^{n-1}$

(3)$(\sin x)'=\cos x$

(4)$(\cos x)'=-\sin x$

(5)$(a^x)'=a^x\ln a$

(6)$(e^x)'=e^x$

$(e^{2x})'=2e^{2x}$

(7)$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

(8)$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

二、求导法则

(1)$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$

(2)$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(3)$[\frac{f(x)}{g(x)}]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

(4)$[Cf(x)]'=Cf'(x)$

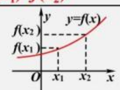
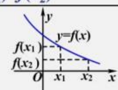
三、复合函数求导

$y=f(u)$和$u=g(x)$的复合函数求导

$y_x=y'_u\cdot u'_x$

4. 函数的单调性：在某个区间(a,b)内，如果$f'(x)>0$，那么函数$y=f(x)$在这个区间内单调递增；如果$f'(x)<0$，那么函数$y=f(x)$在这个区间内单调递减。

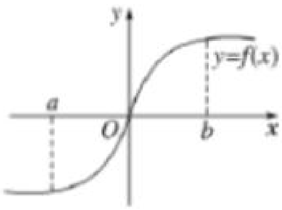
函数的单调性

	增函数	减函数
	设函数$f(x)$的定义域为I，区间$D\in I$，如果对任意x_1，$x_2\in D(x_1<x_2)$，有：	
定义	$f(x)$在D上是增函数 $\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$	$f(x)$在D上是减函数 $\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$
图示	 从左到右，图象上升	 从左到右，图象下降

求函数的增（减）区间的步骤：

- 求定义域：根据函数$f(x)$的特点，确定其定义域。
- 求$f'(x)$：利用基本初等函数的导数公式和导数运算法则求出函数$f(x)$的导数。
- 得增（减）区间：在函数定义域内，解不等式$f'(x)>0$，得函数的单调递增区间；解不等式$f'(x)<0$，得函数的单调递减区间。

5. 导数与函数图像的关系：
   - 一般地，如果一个函数在某一范围内导数的绝对值较大，那么函数在这个范围内变化得快。这时，函数的图像就比较“**陡峭**”（向下或向上）；反之，函数的图像就“**平缓**”一些，也就是说导数的绝对值的大小反映了函数在某个区间或某点附近变化的快慢程度。



函数$y=f(x)$在$(a,0)$或$(0,b)$内的图像“陡峭”，在$(-\infty,a)$或$(b,+\infty)$内的图像平缓。

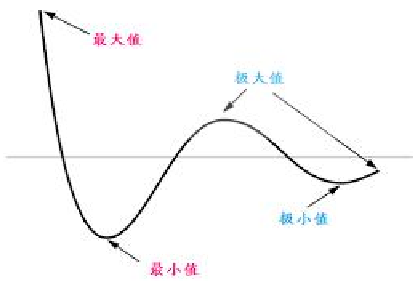
6. 函数的极值与导数：

极值的定义

- 极小值点、极小值：函数$y = f(x)$在点$x = a$的函数值$f(a)$比它在点$x = a$附近其他点的函数值都小，$f'(a) = 0$；而且在点$x = a$附近左侧$f'(a) < 0$，右侧$f'(a) > 0$。则点$x = a$是函数的极小值点，$f(a)$是函数$y = f(x)$的极小值。

- 极大值点、极大值：函数$y = f(x)$在点$x = b$的函数值$f(b)$比它在点$x = b$附近其他点的函数值都大，$f'(b) = 0$；而且在点$x = b$附近左侧$f'(b) > 0$，右侧$f'(b) < 0$。则点$x = b$是函数的极大值点，$f(b)$是函数$y = f(x)$的极大值。

- 极小值点、极大值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值。



7. 函数的最大（小）值与导数：

求函数$y = f(x)$在$[a, b]$上的最大（小）值的步骤

- 求函数$y = f(x)$在内(a, b)的极值
- 将函数$y = f(x)$的各极值与端点处的函数值$f(a)$，$f(b)$比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值。

8. 生活中的优化问题举例：

生活中的优化问题：

- 在生活中，人们常常遇到求使经营利润最大、用料最少、费用最少、生产效率最高等问题，这些问题通常称为优化问题。

利用导数解决生活中的优化问题：

解决优化问题的基本思路

- 优化问题➞用函数表示数学问题➞用导数解决数学问题➞优化问题的答案

处理优化问题的一般步骤

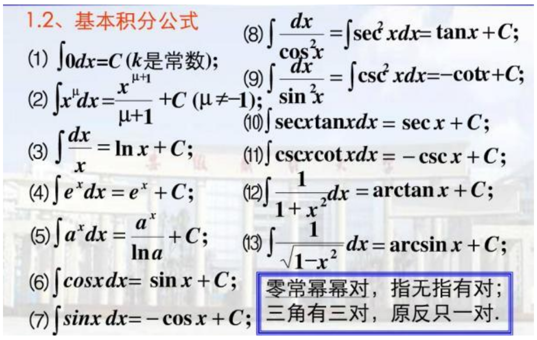
- 分析实际问题中各量之间的关系，列出实际问题的数学模型，写出实际问题中变量之间的函数关系$y = f(x)$。
- 求函数的导数$f'(x)$，解方程$f'(x)=0$。
- 比较函数$y = f(x)$在区间端点和使$f'(x)=0$的点的函数值的大小，最大（小）者为最大（小）值。

注意：

- 求实际问题的最大（小）值时，一定要考虑问题的实际意义，不符合实际意义的应舍去。

定积分

1. 定积分的基本公式：



1.2、基本积分公式

(1) $\int 0dx=C$ (k是常数);

(2) $\int x^{\mu}dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\ (\mu\neq-1)$;

(3) $\int \frac{dx}{x}=\ln x+C$;

(4) $\int e^{x}dx=e^{x}+C$;

(5) $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$;

(6) $\int \cos x\,dx=\sin x+C$;

(7) $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$;

(8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$;

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$;

(10) $\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C$;

(11) $\int \csc x\cot x\,dx=-\csc x+C$;

(12) $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$;

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$;

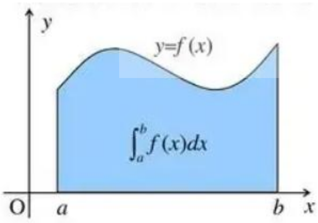
零常幂幂对，指无指有对；
三角有三对，原反只一对.

2. 定积分的性质：

- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

3. 定积分的几何意义：

- 如果在区间$[a,b]$上函数$f(x)$连续且恒有$f(x)\geq 0$，那么定积分$\int_a^b f(x)dx$表示由直线$x=a$，$x=b$，$y=0$和曲线所围成的曲边梯形的面积。



当$a=b$时，$\int_a^b f(x)dx = 0$

定积分的值可能取正值也可能取负值，还可能是0.

- 当对应曲边梯形位于x轴上方，定积分取正值，且等于曲边梯形的面积。

- 当对应曲边梯形位于x轴下方，定积分取负值，且等于曲边梯形的面积的相反数。

- 当位于x轴上方的曲边梯形面积等于位于x轴下方的曲边梯形的面积时，定积分的值为0，且等于位于x轴上方的曲边梯形的面积减去位于轴下方的曲边梯形的面积。

若$f(x)$是奇函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$；
若$f(x)$是偶函数，则
$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$。

4. 微积分的基本原理：

- 如果$f(x)$是区间$[a,b]$上的连续函数，并且$F'(x)=f(x)$，则$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$。这个结论叫做微积分的基本定理，又叫做牛顿-莱布尼茨公式。

5. 积分方法：

a. 部分分式积分法

例子：求$\int \frac{1}{x^2-1}dx$。

先将被积函数分成部分分式：

有 $\frac{1}{x^2-1} = \frac{-1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$

因此，$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{-1}{2(x+1)}dx + \int \frac{1}{2(x-1)}dx$

简化得$\int \frac{1}{x^2-1}dx = -\frac{1}{2}In|x+1| + \frac{1}{2}In|x-1| + C$

$$\therefore \int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}In\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

b. 三角函数积分法

求$sinx$，$cosx$的偶次幂或奇次幂的积分时，经常用到下列三角公式：

$$sin^2x = \frac{1-cos2x}{2}$$

$$cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$$

$$sin^2x + cos^2x = 1$$

c. 含$\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{a^2+x^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$的无理函数积分法（三角代换法）

当$\sqrt{a^2-x^2}$时，可令$x=asin\theta$或$x=acos\theta$；
当$\sqrt{a^2+x^2}$时，可令$x=atan\theta$或$x=acot\theta$；
当$\sqrt{x^2-a^2}$时，可令$x=asec\theta$或$x=acosec\theta$。

d. 分部积分法

$$\int udv = uv - \int vdu$$

设u时，可以根据 LIPET 原理要判断

L：Logarithm 对数$(logx, Inx)$

I：Inverse Trig Functions 反三角函数$(sin^{-1}x, cos^{-1}x)$

P：Polynomials 多项式(x, x^2)

E：Exponential Functions 指数函数(a^x, e^x)

T：Trig Functions 三角函数$(sinx, cosx, tanx)$

例子：求$\int e^x sinxdx$。

令$u = e^x$，$du = e^x dx$；$dv = sinxdx$，$v = -cosx$。

于是$\int e^x sinxdx = -e^x cosx + \int e^x cosxdx$

对$\int e^x cosxdx$，我们再用一次分部积分法，可得$\int e^x cosxdx = e^x sinx - \int e^x sinxdx$。

即$\int e^x sinxdx = -e^x cosx + e^x sinx - \int e^x sinxdx$

整理得 $2\int e^x sinxdx = -e^x cosx + e^x sinx + C$

$$\therefore \int e^x sinxdx = \frac{1}{2}e^x sinx - \frac{1}{2}e^x cosx + C$$

6. 直角坐标系与极坐标系下的面积与体积公式

面积公式：

直角坐标系

$A = \int_a^b ydx$ 或 $A = \int_a^b xdy$

极坐标系

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [r(\theta)]^2 d\theta$$

体积公式：

直角坐标系

$V = \pi\int_a^b y^2 dx$ 或 $V = \pi\int_a^b x^2 dy$

当旋转轴不为x轴或y轴时，

$V = \pi\int_a^b (y-c)^2 dx$ 或 $V = \pi\int_a^b (x-c)^2 dy$

7. 定积分近似计算：

➢ 梯形法（Trapezium Rule）

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

➢ 辛普逊法（Simpson’s Rule）

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[(y_0+y_{2n}) + 4(y_1+y_3+\ldots y_{2n-1}) + 2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})]$$

常微分方程式

1. 一阶线性微分方程

➢ 参数变易法

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$$

$$In|y| = -\int p(x)dx + C_1$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} (C = e^{C_1})$$

在参数变易法中我们将通解中的C变换成未知函数$\phi(x)$，即

$$y = \phi(x)e^{-\int p(x)dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \phi'(x)e^{-\int p(x)dx} - \phi(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$$

代入$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$，得

$$\phi'(x)e^{-\int p(x)dx} - \phi(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + \phi(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = Q(x)$$

$$\phi'(x)e^{-\int p(x)dx} = Q(x)$$

$$\phi'(x) = Q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\phi(x) = \int Q(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

$$\therefore y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int p(x)dx} + C\right)$$

解法步骤如下：

1) 求对应得齐次线性方程的通解$y = Ce^{-\int p(x)dx}$。
2) 令$y = \phi(x)e^{-\int p(x)dx}$代入非齐次方程中确定$\phi(x)$。
3) 求出$\phi(x)$后，再代入到$y = \phi(x)e^{-\int p(x)dx}$中，就得到非齐次线性方程的通解。

- 积分因子法

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$$
$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$$
$$e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int p(x)dx}p(x)y=Q(x)e^{\int p(x)dx}$$
$$ye^{\int p(x)dx}=\int Q(x)e^{\int p(x)dx}+C$$
$$\therefore y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int p(x)dx}+C\right)$$

例子：求解方程$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=xe^x$。
这里$p(x)=-\frac{1}{x}$，积分因子为

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$$
$$\mu(x)=e^{\int -\frac{1}{x}dx}$$
$$\mu(x)=e^{-Inx}$$
$$\mu(x)=\frac{1}{x}$$

两边乘上积分因子，得

$$\frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y\right)=e^x$$

乘了积分因子后，左式一定能写成$\frac{d}{dx}$(y × 积分因子）的形式

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y}{x}\right]=e^x$$
$$d\left[\frac{y}{x}\right]=\int e^x\,dx$$
$$\frac{y}{x}=e^x+C$$
$$\therefore y=x(e^x+C)$$

2. 二阶常系数线性微分方程

微分方程$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$ 的通解如下：

- 若$b^2=4ac=0$，$m_1=m_2$，则 $y=(C_1+C_2x)e^{m_1x}$
- 若$b^2=4ac>0$，$m_1\neq m_2$，则 $y=C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x}$
- 若$b^2=4ac<0$，有一对共轭复根$\begin{cases}m_1=\alpha+\beta i\\ m_2=\alpha-\beta i\end{cases}$，则 $y=e^{\alpha x}(C_1cos\beta x+C_2sin\beta x)$