解析几何

抛物线

1. 定义：把平面内与一个定点F和一条定直线l（l不经过点F）距离相等的点的轨迹叫做抛物线，点F叫做抛物线的焦点，直线l叫做抛物线的准线。

   注意：抛物线定义中的定点F不能在定直线l上，否则该动点的轨迹为过定点F且垂直于l的直线。

2. 抛物线标准方程

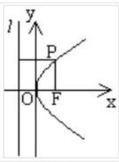
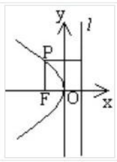
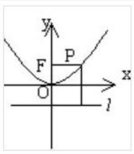
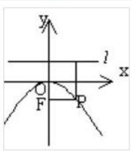
   当抛物线的焦点在x轴上时，其标准方程：

   - $y^2 = 4ax$，焦点$F(a, 0)$，准线方程$x =- a$；
   - $y^2 =- 4ax$，焦点$F(-a, 0)$，准线方程$x = a$。

   当抛物线的焦点在y轴上时，其标准方程：

   - $x^2 = 4ay$，焦点$F(0, a)$，准线方程$y =- a$；
   - $x^2 =- 4ay$，焦点$F(0, -a)$，准线方程$y = a$。

3. 抛物线的简单几何意义

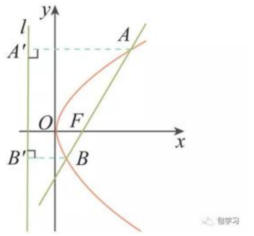
标准方程	y^2=2px（p>0）	y^2=-2px（p>0）	x^2=2py（p>0）	x^2=-2py（p>0）
图形				
范围	x≥0，y∈R	x≤0，y∈R	y≥0，x∈R	y≤0，x∈R
对称轴	X轴		y轴	
顶点坐标	原点O(0,0)			
焦点坐标	$(\frac{p}{2}, 0)$	$(\frac{-p}{2}, 0)$	$(0, \frac{p}{2})$	$(0, \frac{-p}{2})$
准线方程	$x = \frac{-p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$	$y = \frac{-p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
离心率	e = 1			
焦半径	$\lvert PF\rvert = x_0 + \frac{p}{2}$	$\lvert PF\rvert = -x_0 + \frac{p}{2}$	$\lvert PF\rvert = y_0 + \frac{p}{2}$	$\lvert PF\rvert = -y_0 + \frac{p}{2}$

对于抛物线y^2=2px(p≠0)上的点的坐标可设为($\frac{y_0^2}{2p}$,y_0)，以简化运算。

p的几何意义是抛物线焦点到准线的距离，对于方程$y^2 = 2px$，当x值确定时，p值越大，$|y|$也越大，抛物线开口越大。($p = 2a$)

4. 抛物线焦点弦的性质

   焦点弦



   - 当直线通过抛物线的焦点时所得弦称为焦点弦。

   通径

   - 当直线过抛物线的焦点且与对称轴垂直时所得弦称为通径，其长度为 $2p$。

   例子：设AB是过抛物线$y^2 = 4ax$的焦点F的弦，若$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则

   $$x_1x_2 = a^2, y_1y_2 =- 4a^2$$

   $$弦长|AB| = x_1 + x_2 + 2a = \frac{4a}{sin^2\alpha}$$

   （α为直线的倾斜角）

   $$\frac{1}{|FA|} + \frac{1}{|FB|} = \frac{1}{a}$$

   以弦AB为直径的圆与准线相切

5. 直线与抛物线的位置关系

   直线与抛物线的位置关系

   - 将直线代入抛物线，消去y得到一个关于变量x的一元二次方程式$(ax^2 + bx + c = 0)$。

$b^2 - 4ac > 0$	直线与抛物线相交（2 个交点）
$b^2 - 4ac = 0$	直线与抛物线相切（1 个交点）
$b^2 - 4ac < 0$	直线与抛物线相离（没有交点）

   直线与抛物线相交的弦长

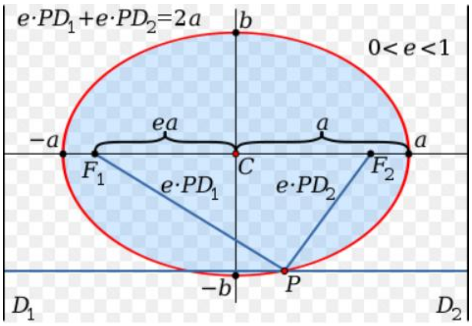
   - 直线被圆锥曲线截得的线段称为圆锥曲线的弦。设直线与抛物线$y^2 = 4ax$交于$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$两点。当直线斜率m存在时，弦长

   $$|AB| = \sqrt{1+m^2}|x_1 - x_2| = \sqrt{1+m^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

   $$|AB| = \sqrt{1+\frac{1}{m^2}}|y_1 - y_2| = \sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2}$$

椭圆

1. 定义：把平面内与两个定点F_1，F_2的距离的和等于常数（大于$|F_1F_2|$）的点的轨迹叫做椭圆。这两个定点叫做椭圆的**焦点**，两焦点间的距离叫做椭圆的**焦距**。
$|MF_1|+|MF_2|=2a(2a>|F_1F_2|)$



$|MF_1|+|MF_2|=2a$（常数）

注意：
- 当 $2a>|F_1F_2|$时，点的轨迹是椭圆。
- 当 $2a=|F_1F_2|$时，点的轨迹是线段F_1F_2。
- 当 $2a<|F_1F_2|$时，点的轨迹不存在。

2. 椭圆的标准方程及求法

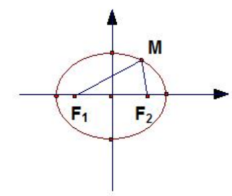
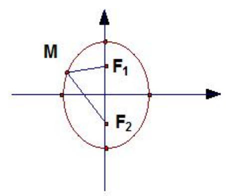
椭圆的标准方程

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，它表示焦点在$x$轴上，焦点分别是$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$的椭圆，这里$a^2=b^2+c^2$。
- $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，它表示焦点在$y$轴上，焦点分别是$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$的椭圆，这里$a^2=b^2+c^2$。

椭圆标准方程的求法

- 求椭圆的标准方程时，首先应确定焦点是在x轴上还是在y轴上，设出相应的标准方程，再由条件确定a^2，b^2的值，即“先定型，再定量”；如果焦点位置不能确定，可设方程为$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1(m\neq n)$。

3. 椭圆的简单几何性质

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$
		
范围	$-a\le x\le a,-b\le y\le b$	$-a\le y\le a,-b\le x\le b$
对称性	既是中心对称，又是轴对称，原点是椭圆的对称中心，x轴和y轴是椭圆的对称轴	
顶点	$(a,0),(-a,0),(0,b),(0,-b)$	$(b,0),(-b,0),(0,a),(0,-a)$
离心率	$e=\frac{c}{a}\in(0,1)$，	
焦点	$(c,0),(-c,0)$	$(0,c),(0,-c)$
焦距	$\lvert F_1F_2\rvert=2c$（其中$c^2=a^2-b^2$）	

- 椭圆上到中心距离最小的点是短轴的两个端点，到中心距离最大的点是长轴的两个端点。
- 椭圆上到焦点距离最大和最小的点是长轴的两个端点。

求椭圆离心率有两种情况：
- 直接求出a，c的值。
- 找出a，c之间的关系，求出$\frac{c}{a}$的值。

4. 直线与椭圆的位置关系

直线与椭圆的位置关系

- 将直线代入椭圆，消去y得到一个关于变量x的一元二次方程式$(ax^2+bx+c=0)$。

$b^2-4ac>0$	直线与椭圆相交（2 个交点）
$b^2-4ac=0$	直线与椭圆相切（1 个交点）
$b^2-4ac<0$	直线与椭圆相离（没有交点）

直线与椭圆相交的弦长

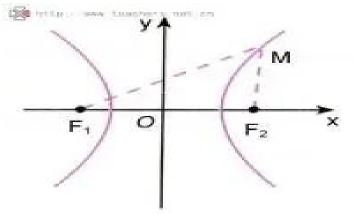
- 直线被圆锥曲线截得的线段称为圆锥曲线的弦。设直线与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$交于$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点。当直线斜率$m$存在时，弦长

$$|AB|=\sqrt{1+m^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}|y_1-y_2|=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$$

双曲线

1. 把平面内与两个定点F_1，F_2的距离的差等于常数（小于$|F_1F_2|$）的点的轨迹叫做双曲线。这两个定点叫做双曲线的**焦点**，两焦点间的距离叫做双曲线的**焦距**。



$|MF_1|+|MF_2|=2a$（常数）

注意：
- 当 $2a<|F_1F_2|$时，点的轨迹是双曲线。
- 当 $2a=|F_1F_2|$时，点的轨迹是两条射线。
- 当 $2a>|F_1F_2|$时，点的轨迹不存在。

2. 双曲线的标准方程及求法

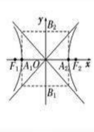
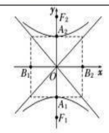
双曲线的标准方程

- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，它表示焦点在$x$轴上，焦点分别是$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$的双曲线，这里$c^2=a^2+b^2$。
- $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，它表示焦点在$y$轴上，焦点分别是$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$的双曲线，这里$c^2=a^2+b^2$。

双曲线标准方程的求法

- 求双曲线的标准方程时，首先应确定焦点是在x轴上还是在y轴上，设出相应的标准方程，再由条件确定a^2，b^2的值，即“先定型，再定量”；如果焦点位置不能确定，可设方程为$mx^2+ny^2=1(mn<0)$，再根据条件求m，n的值。

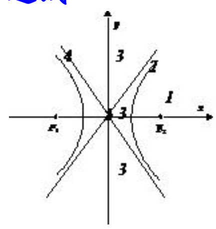
3. 双曲线的简单几何性质

标准方程		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$
图形			
性质	范围	$x\geq a$ 或 $x\leq -a$	$y\leq -a$ 或 $y\geq a$
	对称性	对称轴：坐标轴对称中心：原点	对称轴：坐标轴对称中心：原点
	顶点	$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$	$A_1(0，-a)$，$A_2(0，a)$
	渐近线	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
	离心率	$e=\frac{c}{a}$，$e\in(1，+\infty)$，其中$c=\sqrt{a^2+b^2}$	
	实虚轴	线段A_1A_2叫做双曲线的实轴，它的长$\lvert A_1A_2\rvert=2a$；线段B_1B_2叫做双曲线的虚轴，它的长$\lvert B_1B_2\rvert=2b$；a叫做双曲线的实半轴长，b叫做双曲线的虚半轴长	
	通径	过焦点垂直于实轴的弦叫通径，其长为$\frac{2b^2}{a}$	
a、b、c的关系		$c^2=a^2+b^2(c>a>0，c>b>0)$	

双曲线的离心率

- 离心率的取值范围：$e>1$。当e越接近于 1 时，双曲线开口越小；e越接近于$+\infty$时，双曲线开口越大。

双曲线的渐近线



- 双曲线的渐近线方程可以看出是将标准方程右侧的 1 换成 0 后得到的两个方程。
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线为$y=\pm\frac{b}{a}x$。渐近线为$y=\pm\frac{b}{a}x$的双曲线为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 或$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$。

4. 直角双曲线

- 实轴和虚轴等长的双曲线叫做直角双曲线，标准方程为$x^2-y^2=a^2$，或$y^2-x^2=a^2$，其中$e=\sqrt{2}$，渐近线为$y=\pm x$。

5. 直线与双曲线的位置关系

直线与双曲线的位置关系

- 将直线代入双曲线，消去y得到一个关于变量x的一元二次方程式($ax^2+bx+c=0$)。

$b^2-4ac>0$	直线与双曲线相交（2 个交点）
$b^2-4ac=0$	直线与双曲线相切（1 个交点）
$b^2-4ac<0$	直线与双曲线相离（没有交点）

直线与双曲线相交的弦长

- 直线被圆锥曲线截得的线段称为圆锥曲线的弦。设直线与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 交于$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点。当直线斜率m存在时，弦长

$$|AB|=\sqrt{1+m^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}|y_1-y_2|=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$$

圆锥曲线统整

1. 方程式：$ax^2+bxy+cy^2+2gx+2fy+k=0$
   - 椭圆：$b^2-4ac<0$
   - 抛物线：$b^2-4ac=0$
   - 双曲线：$b^2-4ac>0$

2. 圆锥曲线的切线方程式

   对于点$P(x_1,y_1)$，代换方程为

   $$x^2\to x_1x \qquad y^2\to y_1y$$

   $$x\to\frac{x+x_1}{2} \qquad y\to\frac{y+y_1}{2}$$

   $$xy\to\frac{x_1y+y_1x}{2}$$

3. 圆锥曲线的离心率
   - 圆：$e=0$
   - 椭圆：$0<e<1$
   - 抛物线：$e=1$
   - 双曲线：$e>1$

4. 若$y=mx+c$为曲线上一点的切线，则

圆	$x^2+y^2=r^2$	$c=\pm\sqrt{r^2m^2+r^2}$
抛物线	$y^2=4ax$	$c=\frac{a}{m}$
	$x^2=4ay$	$c=-am^2$
椭圆	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$
	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$	$c=\pm\sqrt{b^2m^2+a^2}$
双曲线	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$
	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$c=\pm\sqrt{a^2-b^2m^2}$

5. 圆锥曲线的参数方程

   - 椭圆：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
     $$\begin{cases}x=acos\theta\\y=bsin\theta\end{cases}$$
   - 抛物线：$y^2=4ax$
     $$\begin{cases}x=at^2\\y=2at\end{cases}$$
   - 双曲线：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
     $$\begin{cases}x=asec\theta\\y=btan\theta\end{cases}$$
   - 直角双曲线：$x^2-y^2=a^2$
     $$\begin{cases}x=ct\\y=\frac{c}{t}\end{cases}$$