

## 第二章 一元二次方程式

一元二次方程式的三種解法：因式分解法、配方法和公式解

### 因式分解法

一元二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a$ 、 $b$  和  $c$  為實數且  $a \neq 0$ ) 的左式為二次多項式，

#### 例子

求  $2x^2 + 1 = 5x - 1$  的解。

$$2x^2 - 5x + 2 = 0。$$

$$2x^2 - 5x + 2 = (2x - 1)(x - 2)$$

$$(2x - 1)(x - 2) = 0$$

$$2x - 1 = 0 \text{ 或 } x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ 或 } x = 2$$

### 配方法

我們也可以利用平方根的概念來解方程式，例如將  $x^2 - 4x + 2 = 0$  改寫為  $(x - 2)^2 = 2$  的形式，進而解得

$$x = 2 \pm \sqrt{2}。$$

#### 例子

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = -2$$

$$\text{兩邊同加 } 2^2 \quad \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = -2 + 2^2$$

$$\text{左式可寫成完全平方式} \quad \Rightarrow (x - 2)^2 = 2$$

$$\begin{aligned} \because \text{右式為正，兩邊開平方} & \Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{2} \\ & \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

### 公式法

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ 或 } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## 例子

求  $x^2 - 6x + 2 = 0$  的解。

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{28}}{2 \times 1} \\&= \frac{6 \pm 2\sqrt{7}}{2} \\&= 3 \pm \sqrt{7}\end{aligned}$$

## 练习

1. 解下列各方程式：

i.  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{6}x - 1 = 0$

iii.  $(x-3)^2 - 2(x-3) - 3 = 0$

ii.  $x^2 + 3 = 6x$

iv.  $-0.5x - 0.1x^2 = 0.5$

2. 已知  $-\frac{1}{2}$  为  $ax^2 + 3x - a = 0$  的一根，求  $a$  的值及另一根。

3. 设  $\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$  为方程式  $4x^2 + 4x + c = 0$  的一根，求  $c$  的值。

4.

i. 已知  $3x^2 - 6x - 21$  可化为  $3(x+p)^2 + q$  的形式，求  $p$ 、 $q$  的值。

ii. 利用 i. 求方程式  $3x^2 - 6x - 21 = 0$  的两根。

5. 解下列各方程式：

i.  $\frac{x+5}{7} = \frac{1}{x-1}$     ii.  $x + \frac{2}{x-2} = 5$     iii.  $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$

6. 若  $x$  满足  $x + \frac{4}{x} = -4$ ，求  $x - \frac{1}{x}$  的值。

7. 已知某水果商人以 RM6000 买进芒果一批。淘汰卖相不佳的芒果 30 公斤，其馀的以每公斤按成本价加 RM10 卖出，商人共得款 RM8100。问此商人原先买进芒果多少公斤？

8. 如果  $(81 - x^n) = (9 + x^2)(3 + x)(3 - x)$ ，那么  $n =$  \_\_\_\_\_。

10. 若分式  $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9}$  的值为 0，则  $x$  的值为？

11. 解下列各题

i.  $x^2(y-z) + (z-y)^3$

iv.  $x^2 + 36y^2 - 12xy$

$$\text{ii. } \frac{3x^2 + 9x}{x^2 + 6x + 9} \cdot \frac{x+3}{x^2 - 3x} \div \frac{1}{x^2 - 9}$$

$$\text{v. } \frac{(3a^2b)^2 \cdot (5a^{-3}b^{-5})^3}{25ab^{-7}}$$

$$\text{iii. } \frac{1}{x+3} - \frac{6}{x^2 - 9} - \frac{x-1}{6-2x}$$

$$\text{vi. 解方程: } \frac{2-x}{x-3} = 1 - \frac{1}{3-x}$$

12. 已知  $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ , 求  $7y(x-3y)^2 - 2(3y-x)^3$  的值。

13.  $m$  为何值时, 关于  $x$  的方程  $\frac{2}{x-2} + \frac{mx}{x^2-4} = \frac{3}{x+2}$  ?

14. 解下列方程式

1	$8m^2 - 12m + 10m - 15$	2	$6y^2 - 15y + 4y - 10$
3	$x^2 + 10x + 24$	4	$x^2 + 8x + 16$
5	$x^2 - 10x + 25$	6	$x^2 + 4x + 3$
7	$t^2 - 30t + 225$	8	$t^2 + 18t + 81$
9	$x^2 + 7x - 30$	10	$m^2 - 12m + 36$
11	$m^2 + 16m + 64$	12	$x^2 + 20x + 100$
13	$x^2 - 14x + 24$	14	$x^2 + 15x + 44$
15	$y^2 - 6y + 9$	16	$m^2 - 4m + 3m - 12$
17	$2t^2 - 4t + t - 2$	18	$x^2 + 5x + 2x + 10$