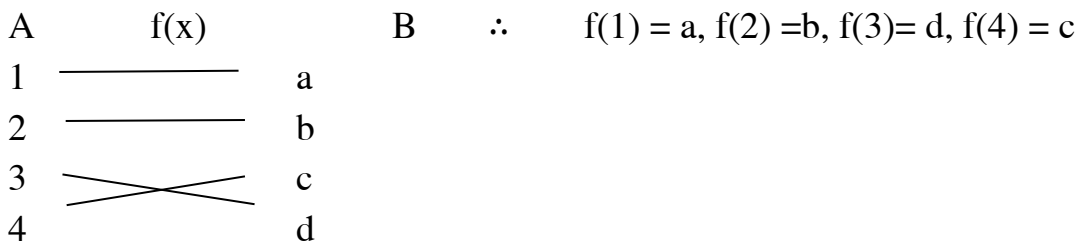


函数

对应与映射

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, 两个集合之间存在对应的关系 $f(x)$



映射

- I. A、B 是非空集合
- II. A 中的任一元素，在 B 中都有唯一的元素和它对应
- III. 记作 $f: A \rightarrow B$ 或 $f(a) = b$; a 是原象(object), b 是映像(image)
- IV. 只有 one-to-one function 和 many-to-one function

函数

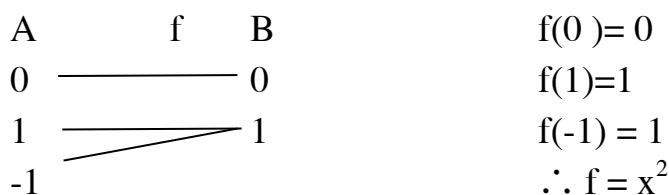
$x \xrightarrow{\quad f \quad} y$
 $y = f(x)$; x 是自变量(independent variable); y 是因变量(dependent variable)

条件

- I. A、B 是非空集合
- II. f 是 A 到 B 的映射
- III. B 中都有 A 的对应

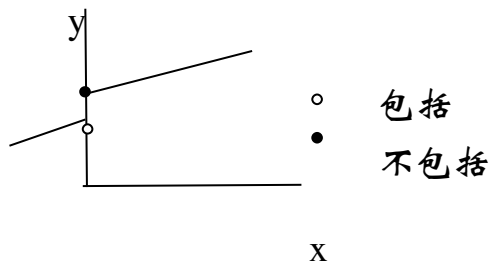
函数的表示法

- I. 解析法(analytical method)
 - 通过一个数学等式表示两个变量之间的函数关系
 - 例如: $A = \pi r^2, y = mx + c$ 等
- II. 范氏图示法(Venn diagram method)
 - 通过两个集合的范氏图上标注箭头表示函数关系
 - 例如



III. 图象法(Graphical method)

- 通过图像表示函数关系
- 例如



IV. 列表法(tabulation method)

- 通过表格列出自变量的取值和对应的因变量
- 例如

时间 (秒)				
距离 (公里)				

定义域 domain、对应域 codomain、值域 range

例如

$$f(x) = 2x + 3$$

定义域, $D_f = \mathbb{R}$

对应域 = \mathbb{R}

值域, $R_f = \mathbb{R}$

NOTE

实数 (\mathbb{R}) : 是有理数和无理数的总称

有理数 (\mathbb{Q}) : 是整数和分数的总称

自然数 (\mathbb{N}) : 是大于或等于 0 的整数

整数 (\mathbb{Z}) : 所有数的统称, 包括负整数、0、和正整数

函数与其图像

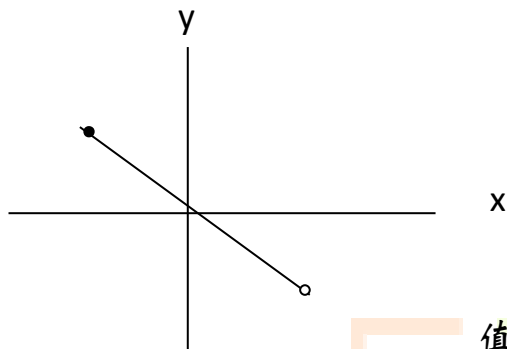
a. 简单函数图像 (一次函数) $y = mx + c$

a. 正比例函数 $y = kx$ [定义域为 \mathbb{R}]

例子

$$Y = -2x \text{ 且 } -2 \leq x < 2$$

X	-2	-1	0	1
y	4	2	0	-2

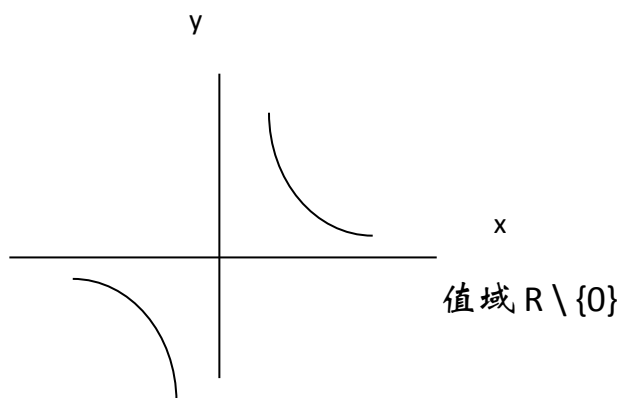


b. 反比例函数 $y = k/x$ [定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$]

例子

$$Y = 1/x \text{ 且 } -2 \leq x \leq 2$$

X	-2	-1	-0.5	0.5	1	2
y	-0.5	-1	-2	2	1	0.5

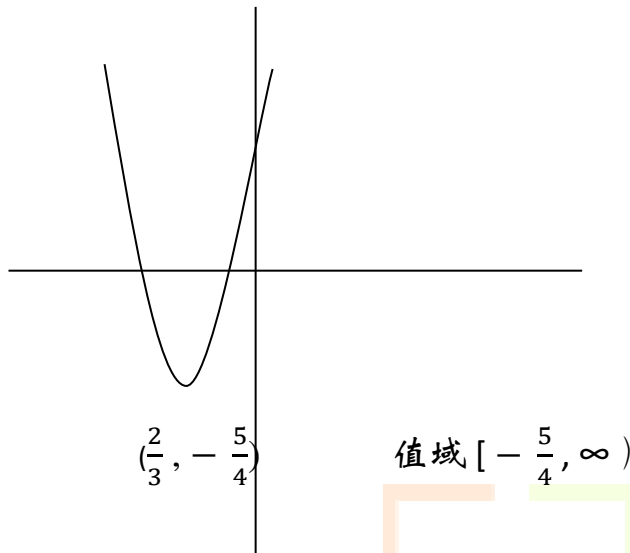


b. 简单函数图像 (二次函数) $y = ax^2 + bx + c$

例子

$$Y = x^2 + 3x + 1$$

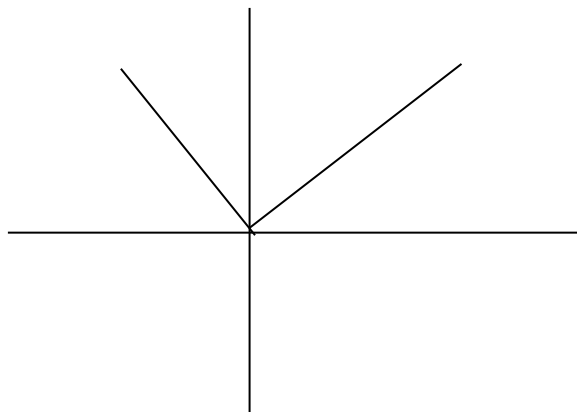
配方法: $y = (x + \frac{2}{3})^2 - \frac{5}{4}$, 意思是当 $x = \frac{2}{3}$, $y = -\frac{5}{4}$



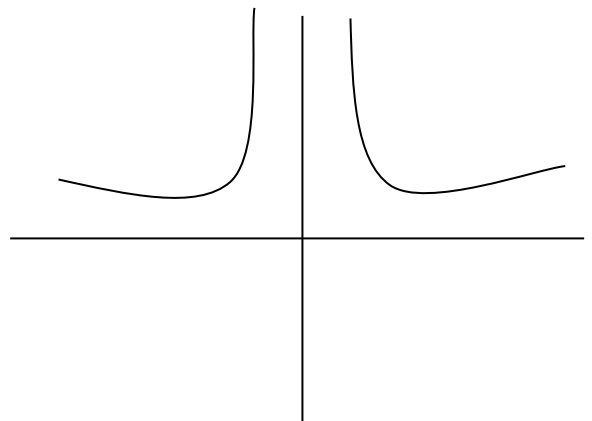
绝对值 (absolute value)

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{当 } x > 0 \\ -x, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

绝对值图像 $y = |x|$



值域 $[0, \infty)$



值域 $(0, \infty)$

一对一函数(One to one function)

- 对应域 B 中的任一元素在定义域 A 中最多只有一个原象

- 例子

$f(x) = 2x$ 是一对一函数; $f(x) = x^2$ 不是一对一函数

映成函数(Onto Function)

- 对应域 B 中任何一元素在 f 之下都有原象

- 例子

$F(x) = x - 1$ 是映成函数; $f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \\ x - 1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$ 不是映成函数

一一映成函数(One to One Onto function)

- 是一对一函数

- 是映成函数

反函数 (Inverse Function)

$$y = f(x)$$

$$f^{-1}(x) = y$$



SJUEC.COM

练习

1. 画图表示 A 到 B 的对应

$A = \{30^\circ, 45^\circ, 60^\circ\}$, $B = \{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ 对应付则为“取正弦值”

2. 若 $f(x) = x^4$, 求 -1, 0, 1, 2 在 f 之下的映象

3. 用图表示从 $\{a, 1\}$ 到 $\{1, 2\}$ 的函数

4. 设 $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y\}$, 写出 A 到 B 的各种映射

5. 用解析法写出下列函数

a. f 将每个自然数映射为比其 3 倍少 2 的数

b. g 将每个实数映射为其平方的 5 倍

c. h 将每个正实数映射为 1, 负实数映射为 -1, 0 映射为自身

d. k 将不等于 0 的实数映射为倒数

6. 作出图像

a. $f(x) = x^2$ 且 $-2 < x < 2$

b. $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

7. 设 $f(0) \neq 0$, 且所以 $x, y \in \mathbb{R}$, $2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 恒成立, 以 $f(x)$ 表示 $f(2x)$

8. 若 $f(x) = x^2 + 3$, 求 $f(x-2)$

9. 若 $f(x) = x^2 - 3x + 2$, 求 $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

10. 若 $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = x^2 + 5$, 求 $f[g(3)]$

11. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < -2 \\ x^2 - 2, & -2 \leq x \leq 3 \\ 3x - 1, & x > 3 \end{cases}$ 求 $f(-1), f(-2), f(1), f(5)$

12. 设 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $f(x) = 3x^2 - 2$, 求定义域和值域

13. 若 $x \in [-3, 5]$ 且 $f(x) = 2x^2 - 7$, 求 $f(t-2)$

14. 求定义域

a. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b. $f(x) = \sqrt{2x - 4}$

- c. $f(x) = \frac{x}{2x+3}$
 d. $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{4-2x}$
 e. $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x+2}$
 f. $f(x) = \frac{1}{4x+7}$
 g. $f(x) = -4x + 5$
 h. $f(x) = x^2 - 1$

15. 求值域

- a. $f(x) = 2x$
 b. $f(x) = x^2$
 c. $f(x) = \sqrt{x}$
 d. $f(x) = 2x - 5$
 e. $f(x) = (x + 1)^2$
 f. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 1$
 g. $f(x) = \frac{2}{x}$
 h. $f(x) = 2x^2 - 1$

16. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, x 为非 0 实数, 值域为?

17. 求 $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ 的值域

18. $f(x) = |2x - 3|$, 且 $0 \leq x \leq 4$, 值域 =

19. $y = -2x^2 + 6x - 9$ 的值域

20. 若 $f(x) = \frac{1}{2}x(x - 1)$, 求 $f(x+2)$

21. 若 $f(x) = x^2$, $f(2x - 1) = g(2x - 5)$, 证明 $g(x) = x^2 + 8x + 16$